تحلیل جریان درهم سیال روی یک، دو و سه استوانه‌ی متوالی با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی *

(یادداشت پژوهشی)

مهرداد زابلی[۱]　　　　بهروز ظفرمند[۲]

چکیده *تحلیل جریان اطراف اجسام استوانه‌ای یکی از مسائل اساسی در مکانیک سیالات می‌باشد و از اهمیت بالایی برخوردار است. بررسی میدان‌های سرعت در جریان‌های پتانسیل و لزج، به‌عنوان اساس و پایه‌ای برای یافتن میدان فشار و بررسی نیروهای وارد از سیال به جسم مانند نیروی لیفت و درگ، در رژیم‌های مختلف جریان، اکثر تحقیقات در شاخه‌ی سیالات را به خود اختصاص داده است. چون تشکیل گردابه‌ها در پشت جسم ماهیتی کاملاً وابسته به زمان دارد، با مدل‌های معمولی توربولانس که بر اساس متوسط زمانی عمل می‌کند، قابل توجیه نیست و باید از حل مستقیم معادلات ناویر استوکس استفاده نمود. یکی از مدل‌های موجود که می‌تواند معادلات وابسته به زمان ناویراستوکس را در گستره‌ی وسیعی از اعداد رینولدز حل نماید روش ورتکس‌های تصادفی است. در این روش چون میدان سرعت به‌صورت لحظه‌ای محاسبه می‌شود و می‌توان از آن برای جریان درهم که ماهیتی وابسته به زمان دارد استفاده نمود. در این روش معادلات ورتیسیته‌ی به‌دست‌آمده از معادلات ناویر استوکس در دو مرحله جابه‌جایی و پخش حل می‌شود. در این تحقیق جریان روی یک، دو و سه استوانه در رینولدز ۱۴۰۰۰۰ مورد بررسی قرار گرفته و میدان سرعت لحظه‌ای و متوسط همراه خطوط جریان نمایش داده شده است. همچنین با رسم لحظه‌ای توزیع میدان گردابه‌ها و خطوط جریان نمایش زیبای گردابه‌ها در منطقه پشت استوانه‌ها قابل مشاهده است.*

واژه‌های کلیدی نگاشت همدیس، جریان درهم و آرام، روش ورتکس‌های تصادفی

Study of Unsteady Viscous Turbulent Flow with High Reynolds Passing One, Two & Three Cylinders by Random Vortex Method (RVM)

M. Zaboli　　　　B. Zafarmand

Abstract *Analysis of the flow passing cylindrical obstacles is one of the basic issues in fluid dynamics and is of great importance. Many surveys have been conducted to investigate the velocity field in potential and viscous flows, as a basis for finding pressure field, and investigation of forces exerted by fluid on obstacles such as uplift and drag forces in different flow regimes. Since the nature of formation of vortexes behind the obstacles is absolutely depended on time, the conventional turbulent models which are based on average time, do not justify, and the use of direct solution of Navier Stocks equations is inevitable. One of the presented models which can solve time-dependent Navier Stocks equations in wide range of Reynolds numbers, is Random Vortex Method (RVM). Since in this method velocity field is instantly calculated, it can be used to simulate turbulent flows with a time-dependent nature. In this paper, vorticity equations gained from Navier Stocks equations are solved in both convection and diffusion phases. In this study, the flow on three cylinders with Re=140000 is investigated and field of average and instant velocity is shown along with streamlines. Also by drawing instant distribution of vortex fields and streamlines, it is possible to provide a revealing presentation of vortex behind cylinders.*

Key Words Conformal Mapping, Laminar & Turbulent Flow, Random Vortex Method

*تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۱۱/۲۰ و تاریخ پذیرش آن ۱۳۹۱/۱۰/۱۷ می‌باشد.

(۱) کارشناس ارشد، گروه مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد.

(۲) نویسنده‌ی مسؤول: استادیار گروه مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد.

مقدمه

به‌طور کلی جریان درهم علاوه بر داشتن ماهیت سه‌بعدی، طبیعت نوسانی وابسته به زمان را نیز داراست؛ طبیعتی که حل معادلات حاکم بر این جریان را با مشکل روبه‌رو می سازد. اگر چه روابط مربوط به متوسط زمانی متغیرها برای حالت‌ها و هندسه‌های خاص می‌تواند کاربرد داشته باشد امّا از عمومیت زیادی برخوردار نیست.

تشکیل گردابه‌های کوچک و بزرگ در اطراف اجسام، جدایی جریان و محل شروع آن نقش تعیین‌کننده‌ای بر میدان‌های سرعت، فشار، درجه حرارت و... دارد. لذا بررسی و مطالعه‌ی این گردابه‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است و یکی از شاخص‌های مهم جریان درهم می‌باشد.

روش عددی ورتکس‌های تصادفی برای حل معادلات حرکت دوبعدی و وابسته به زمان برای سیالات غیر قابل تراکم در جریان‌های آرام و درهم به خدمت گرفته می‌شود. در این روش محاسبات در زمان‌های مختلف با حل معادله‌ی انتقال ورتیسیته (Vorticity Equation) در دو مرحله‌ی جابه‌جایی (Convection) و پخش (Diffusion) انجام می‌گیرد.

برای ارضای شرط عدم لغزش، تعدادی ورتکس با چرخش معین روی سطح به‌وجود می‌آیند که حرکت این ورتکس‌ها با دیدگاه لاگرانژی و بر اساس مکانیزم جابه‌جایی و پخش انجام می‌گیرد. حرکت ورتکس‌های تولیدشده باعث القای سرعت به تمام محیط اطراف خود و سطح جسم می‌شود که مؤلفه‌ی عمودی سرعت القایی روی جسم با تولید تعدادی چشمه و چاه روی سطح صفر می‌گردد. این امر در هر گام زمانی انجام می‌شود تا مؤلفه‌ی عمودی سرعت القایی ناشی از چشمه و چاه‌ها در خلاف مؤلفه‌ی عمودی سرعت القایی ناشی از ورتکس‌ها باشد. در نهایت توزیع ورتیسیته، جریان سیال را در حالت آرام و درهم شبیه‌سازی می‌کند.

ارائه‌ی روش ورتکس را به الکساندر چورین (Chorin) [1] در سال ۱۹۷۳ نسبت می‌دهند که به‌منظور مدل کردن جریان درهم اطراف یک استوانه مطرح کرد و در سال ۱۹۷۸ [2] برای تحلیل لایه‌ی مرزی نیز بیان نمود. پس از کارهای فوق روش ورتکس‌های تصادفی جای خود را به‌عنوان یک روش عددی برای حل جریان درهم اطراف اجسام باز کرد. در سال‌های ۱۹۸۱ تا ۱۹۸٤ تحقیقاتی راجع به افزایش دقت و همگرایی این روش توسط بیل (Beal) و مجدا (Majda) [3] و بنفاتو (Benfatto) و پول ویرنتی (pulvirenty) انجام گرفت [4]. در سال ۱۹۸۹ این روش توسط چیر (Cheer) [5] روی سیلندر دوار در رینولدزهای ۳۰۰۰ و ۹۵۰۰ با حرکت ضربه‌ای به کار گرفته و کامل شد.

در میان تحقیقات اخیر می‌توان مواردی را نام برد از جمله؛ حل جریان درهم حول دو بیضی با استفاده از روش گردابه‌های تصادفی [٦]، محاسبه‌ی تنش‌های رینولدز در جریان پشت (دنباله) و روی یک استوانه با مقطع مستطیلی و نیز شبیه‌سازی جریان آرام و درهم در کانال با انبساط ناگهانی با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی [۷ و ۸]، بررسی جریان سیال از روی استوانه در رینولدزهای بالا با استفاده از روش گردابه‌های تصادفی [۹] و بررسی جریان سیال از روی ایرفویل بیضوی در رینولدزهای بالا با استفاده از روش گردابه‌های تصادفی [10].

می‌توان از مزایای روش ورتکس به موارد ذیل اشاره نمود:

– در روش ورتکس‌های تصادفی برای شبیه‌سازی جریان سیال نیاز به شبکه‌بندی اطراف جسم نیست به‌طوری که روش ورتکس را روشی بدون مش (Meshless Method) می‌خوانند.

– در بررسی جریان به روش ورتکس، به‌جای استفاده از متغیرهای اصلی نظیر فشار و سرعت از ورتیسیته و معادله‌ی انتقال آن استفاده می‌شود و ازاین‌رو می‌توان

حرکت سیال را با حذف ترم فشار از معادلات ناویر- استوکس، شبیه‌سازی نمود.

- امکان بررسی جریان سیال در گستره‌ی وسیعی از اعداد رینولدز، اعم از رژیم‌های آرام و درهم میسر است.

- به مدل های شبیه‌سازی جریان درهم نظیر $K-\omega$ ، $K-\varepsilon$ و ... نیاز نمی‌باشد.

در مقاله‌ی حاضر با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی جریان درهم روی یک، دو و سه استوانه‌ی متوالی در رینولدز ۱۴۰۰۰۰ مورد بررسی قرار گرفته و میدان سرعت لحظه‌ای و متوسط به‌کمک خطوط جریان بررسی می‌شود.

معادلات حاکم

همان‌طور که گفته شد اساس کار و معادله‌ی حاکم بر روش ورتکس، معادله‌ی انتقال ورتیسیته (معادله‌ی ۳) می‌باشد که این معادله از تأثیر اپراتورکرل (Curl Operator) روی معادلات ناویر- استوکس (معادله‌ی ۲) و ادغام آن با معادله‌ی تراکم‌ناپذیر پیوستگی (معادله‌ی ۱) در غیاب نیروهای جسمی (Body Force) حاصل می‌شود.

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla.\vec{V}=0\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}.\text{grad}\rho=-\rho\vec{\nabla}.\vec{V} \tag{۱}$$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}.\text{grad}\,\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\text{grad}P+\nu\nabla^2\vec{V} \tag{۲}$$

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{\omega}=\nu\Delta\vec{\omega} \tag{۳}$$

آن‌چه که در معادله‌ی (۳) بسیار مورد توجه است عدم حضور فشار به‌عنوان مجهول در معادله می‌باشد. این موضوع بیان می‌کند که میدان‌های ورتیسیته و جریان سیال، بدون نیاز به میدان فشار و یافتن آن، قابل محاسبه است.

شرط اولیه‌ی مسأله‌ی پتانسیل و غیرلزج بودن جریان در تمام میدان و تنها شرط مرزی مسأله صفر بودن سرعت روی دیواره‌ها بر اثر لزجت سیال می‌باشد.

همان‌طور که گفته شد معادله‌ی (۳) در دو مرحله حل می‌شود. مرحله‌ی اول مربوط به مکانیزم جابه‌جایی و مرحله‌ی دوم مربوط به مکانیزم پخش است. معادله‌ی مربوط به مرحله‌ی اول (مکانیزم جابه‌جایی) درحقیقت همان معادله‌ی اولر(Euler) به فرم ورتیسیته است که بیان می‌کند ورتیسیته یک خاصیت سیال می‌باشد و برای ذرات در طول مسیر حرکت ثابت می‌ماند.

معادله‌ی مربوط به مکانیزم جابه‌جایی با حذف جمله‌ی $\nu\Delta\vec{\omega}$ از معادله‌ی ورتیسیته به‌منظور در نظر نگرفتن اثرات لزجت به‌صورت زیر خواهد بود [11]:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{\omega}=0 \quad\rightarrow\begin{cases}\dfrac{d\vec{r_p}}{dt}=V(\vec{r_p})\\[2mm] \dfrac{D\vec{\omega_p}}{Dt}=0\end{cases} \tag{٤}$$

مرحله‌ی دوم (مکانیزم پخش) با درنظر گرفتن اثرات لزجت سیال و حرکت تصادفی حباب‌های ورتکس صورت می‌پذیرد. معادله‌ی پخش با حذف جمله‌ی $(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{\omega}$ از معادله‌ی به‌فرم ورتیسته تولید می‌گردد. بنابراین، معادله‌ی (۳) به‌صورت زیر تغییر می‌کند [11]:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}=\nu\Delta\vec{\omega} \tag{۵}$$

در مرحله‌ی اول (مکانیزم جابه‌جایی) تعداد زیادی ورتکس دارای حرکت بوده و بر روی یکدیگر و فضای اطراف خود سرعت القا می‌کنند که سرعت القایی توسط ورتکس j ام روی نقطه‌ی z_i به شکل زیر است [12]:

$$\bar{W}_{\text{vortex}}(z_i)=\sum_{j=1,i\neq j}^{N}\frac{-i\Gamma_j\left|z_i-z_j\right|}{2\pi\times\max(\left|z_i-z_j\right|,\delta)}\left(\frac{1}{z_i-z_j}\right)$$
$$\delta=\frac{h}{2\pi} \tag{٦}$$

$$(u_t)_j.h = N\Gamma_j \Rightarrow N = \frac{(u_t)_j.h}{\Gamma_j} \qquad (۷)$$

N تعداد ورتکس‌ها، δ شعاع هر گردابه، Γ_j چرخش مربوط به ورتکس j ام، h فاصله‌ی بین هر دو قسمت متوالی بر محیط دایره، $(u_t)_j$ سرعت مماسی روی قسمت j ام و $\bar{W} = u - iv$ مزدوج سرعت می‌باشد.

برای صفر کردن سرعت عمودی روی دیواره از قرار دادن چشمه و چاه روی جسم استفاده می‌کنیم. سرعت القایی ناشی از چشمه و چاه واقع در نقطه‌ی z_j روی نقطه‌ی z_i به شکل زیر است [12]:

$$\bar{W}_{source}(z_i) = \mp \frac{\alpha(j)}{2\pi}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) \qquad i \neq j \qquad (۸)$$

α_j قدرت چشمه یا چاه j ام می‌باشد. علامت + برای چشمه و علامت − برای چاه است.

اثر هم‌زمان چشمه وچاه‌ها بر یکدیگر باعث به‌وجود آمدن یک سرعت عمودی مساوی و در خلاف جهت سرعت عمودی القایی ناشی از ورتکس‌ها خواهد شد که نهایتاً باعث صفر شدن سرعت عمودی القایی در هر قسمت می‌شود.

برای محاسبه‌ی قدرت چشمه و چاه از حل دستگاه N معادله و N مجهول استفاده می‌کنیم [12]. به‌طوری که:

$$A\alpha = b$$

$$A : \begin{cases} a_{ij} = U_1(ij)n_1 + U_2(ij)n_2 & i \neq j \\ a_{ii} = \frac{1}{2}h^{-1} & i = 1,\ldots,N \end{cases} \qquad (۹)$$

$$U_1(ij) = -\frac{1}{2\pi}\frac{X_j - X_i}{R_{ij}^2} \quad , \quad U_2(ij) = -\frac{1}{2\pi}\frac{Y_j - Y_i}{R_{ij}^2} \qquad (۱۰)$$

$$b_i = -\vec{W}_{vortex}(i).\vec{n} \qquad (۱۱)$$

در دومین مرحله (مکانیزم پخش)، حرکت تصادفی ورتکس‌ها بر اساس یک متغیر تصادفی گوسی انجام می‌شود. معادلات مربوط به این مرحله (معادله‌ی ۵) مشابه معادله‌ی پخش انتقال حرارت می‌باشد و حل این معادله با استفاده از تابع گرین در دو بعد به‌دست می‌آید [10].

$$G\left(\vec{r}, t\right) = \frac{1}{4\pi\nu t}\exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right] \qquad (۱۲)$$

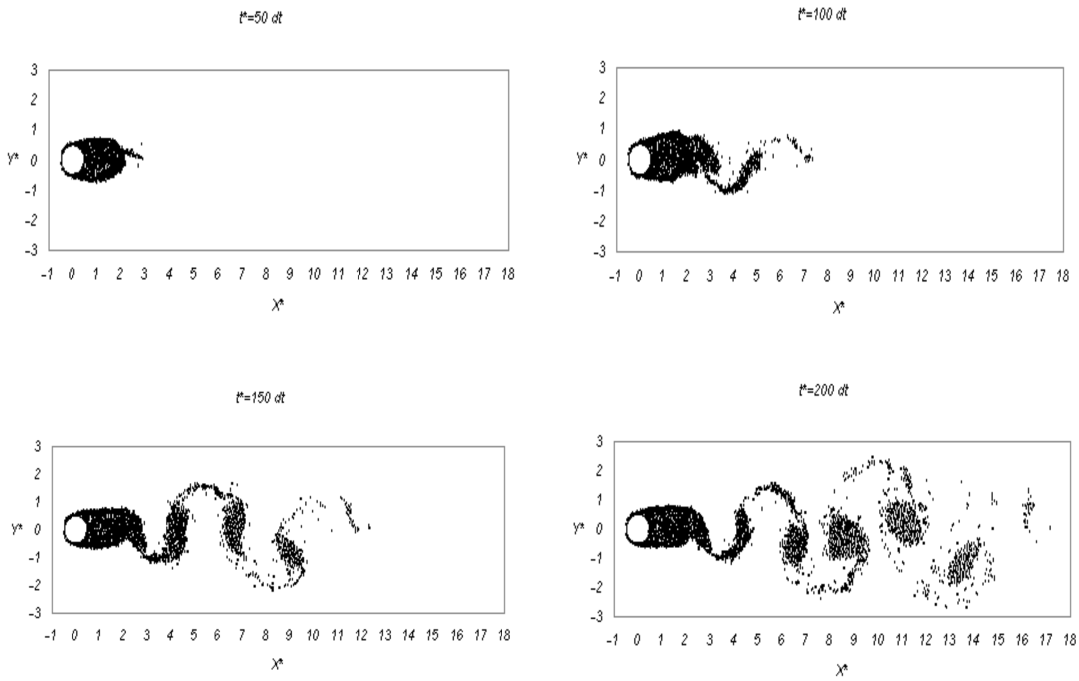
تابع گرین مذکور با تابع چگالی احتمال یک متغیر گوسی با مقدار متوسط (میانگین) صفر و انحراف معیار σ برابراست. تابع چگالی احتمال یک متغیر گوسی با تعریفی که بیان شد به‌صورت زیر می‌باشد [10]:

$$p(\eta, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (۱۳)$$

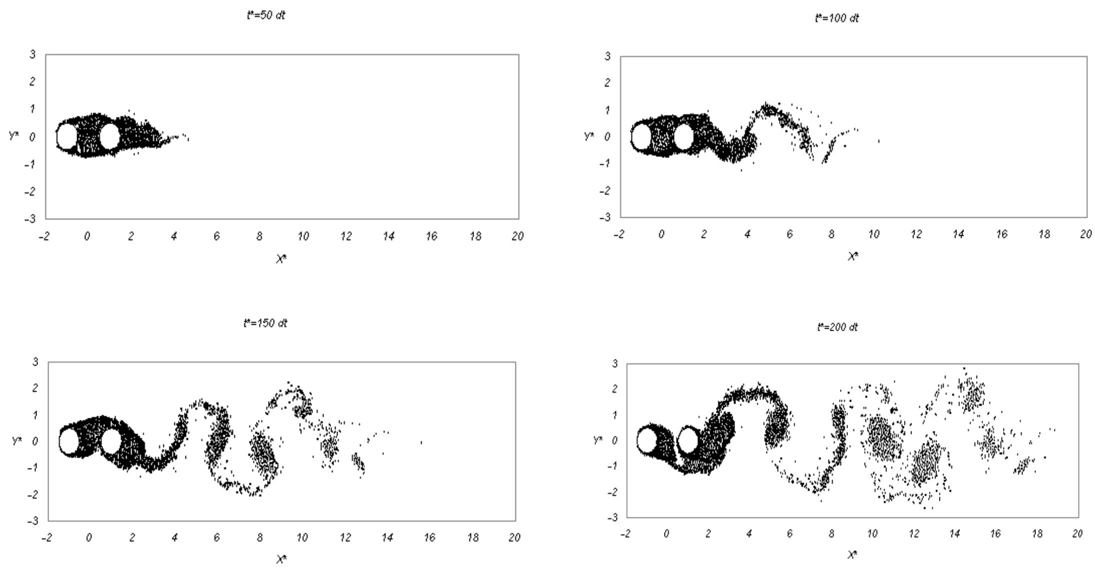
با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی (۱۳ و ۱۲) متوجه خواهیم شد که مقادیر تصادفی η از یک توزیع مقادیر تصادفی با میانگین صفر و انحراف معیار $\sqrt{\frac{2t}{Re}}$ به‌دست می‌آیند [10]. بنابراین، اگر $Z_j(t)$ موقعیت ورتکس j ام در لحظه‌ی t باشد موقعیت آن در لحظه‌ی $t + \Delta t$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [10].

$$Z_j(t + \Delta t) = Z_j(t) + \left[\bar{W}_{p.}(j) + \bar{W}_v(j, t) + \bar{W}_s(j, t)\right]\Delta t + \eta_j \qquad (۱٤)$$

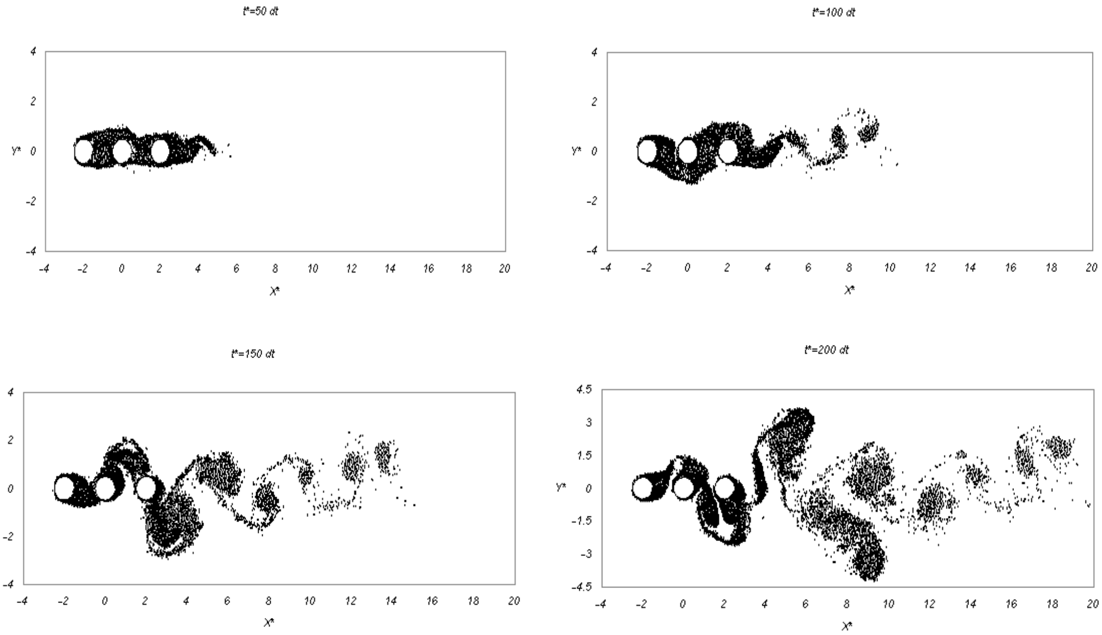
کرودی و مارشال (Crowdy & Marshal) [13] روش به‌دست آوردن تابع پتانسیل اطراف استوانه‌ها را ارائه داده‌اند.



شکل ۱ حرکت ورتکس‌ها اطراف یک استوانه در چهار گام زمانی t*=50,100,150,200 Δt , Δt=0.1



شکل ۲ حرکت ورتکس‌ها اطراف دو استوانه در چهار گام زمانی t*=50,100,150,200 Δt , Δt=0.1



شکل ۳ حرکت ورتکس‌ها اطراف سه استوانه در چهار گام زمانی $t^*=50,100,150,200\ \Delta t\ ,\ \Delta t=0.1$

نتایج

توزیع ورتیسیته- عدد استروهال. آن‌چه در روش ورتکس از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است و از آن می‌توان به‌عنوان یک ویژگی برجسته و کم‌نظیر این روش نام برد، حل معادلات حاکم بر جریان سیال به‌طور لحظه‌ای و وابسته به زمان است. بنابراین، توزیع ورتیسیته‌ی به‌دست آمده از اجرای برنامه، حرکت جریان سیال را در هر لحظه از زمان به‌نمایش می‌گذارد که مشاهده‌ی پیوسته‌ی این توزیع ورتیسیته جذابیت خاصی خواهد داشت. برای محدوده‌ی رینولدزهای کم‌تر از $۱۰^۷$، ورتکس‌ها با نظم و تنوع خاصی از جسم جدا می‌شوند و به طرف پایین دست حرکت می‌کنند که این گردابه‌های منظم ورتکس‌ها با نظم و تنوع خاصی از جسم جدا شده و به طرف پایین دست حرکت می‌کنند که در شکل‌های (۳-۱) توزیع ورتیسیسته و حرکت ورتکس‌ها برای چهار گام زمانی در اطراف یک، دو و سه استوانه به تصویرکشیده شده است. تشکیل گردابه‌های فون کارمن نیزبه زیبایی هر چه تمام‌تر قابل رؤیت است. در مورد جریان روی یک استوانه با توجه به تعداد گردابه‌ها که در واحد زمان از استوانه جدا می‌شوند می‌توان فرکانس گردابه‌های تولید و جدا شده و نهایتاً عدد استروهال را نیز محاسبه نمود. برای عدد رینولدز ۱۴۰۰۰۰ عدد استروهال حدود ۰/۲ به‌دست می‌آید.

سرعت لحظه‌ای

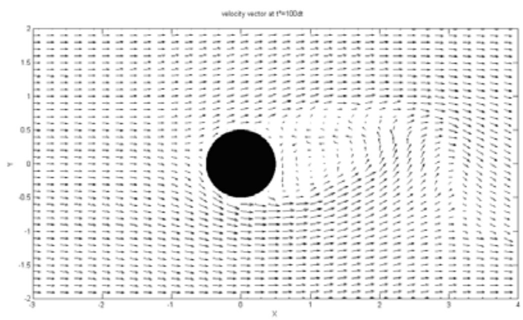
پس از این که تعداد ورتکس‌ها در محدوده‌ی محاسبه به تعداد تقریباً ثابتی رسید، می‌توان سرعت لحظه‌ای را در یک شبکه‌ی ثابت محاسبه نمود. بدین منظور یک شبکه‌ی ثابت در اطراف استوانه‌ها در نظر می‌گیریم و سرعت را در این شبکه محاسبه می‌نماییم. سرعت در هر نقطه عبارت است از سرعت جریان پتانسیل عبوری از آن نقطه $W_{pot}(z_n)$ به‌علاوه‌ی سرعت القاشده توسط ورتکس‌های موجود در میدان $W_{vortex}(z_n)$ و به‌علاوه‌ی سرعت القاشده توسط چشمه‌ها و چاه‌های

موجود روی استوانه‌ها (به‌خاطر ارضـای شـرط مـرزی سـرعت عمـودی روی اسـتوانه‌هـا ایجـاد مـی‌شـوند). بنـابراین اگـر سـرعت لحظـه‌ای روی هـر گـره را بـا $W(z_n)$ نشان دهیم خواهیم داشت:

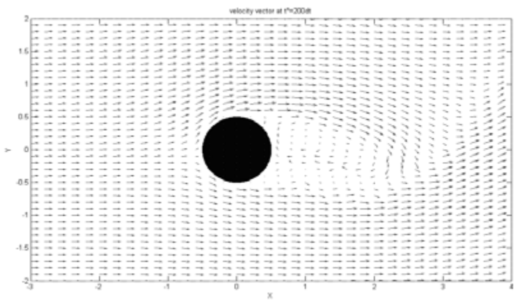
$$W_{source}(z_n) = W_{pot}(z_n) + W_{vortex}(z_n) + W_{source}(z_n) \quad (۱۵)$$

پس در هر گام زمانی سرعت لحظه‌ای کـل شـبکه در گره‌های مشخص محاسبه گردیده است.

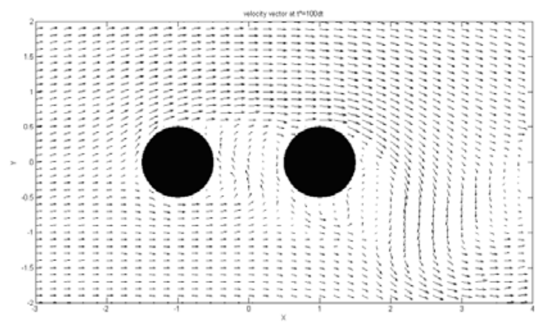
شکل‌های (۹–٤) سرعت‌های لحظه‌ای در دو گـام زمانی را برای یک، دو و سه استوانه نشان می‌دهـد کـه نشان‌دهنده‌ی حل وابسته به زمان این روش می‌باشد.



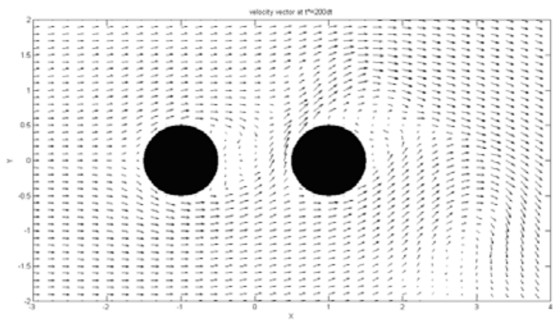
شکل ٤ بردارهای سرعت لحظه‌ای برای یک استوانه در $t^*=100\ \Delta t\ ,\ \Delta t=0.1$



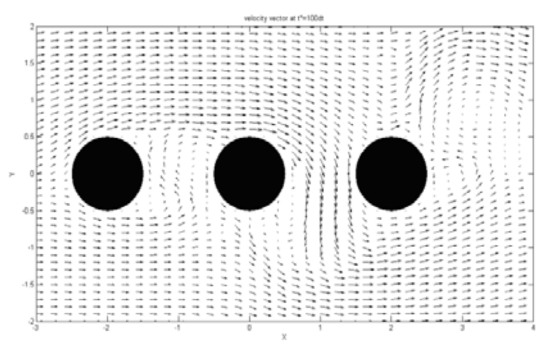
شکل ۵ بردارهای سرعت لحظه‌ای برای یک استوانه در $t^*=200\ \Delta t\ ,\ \Delta t=0.1$



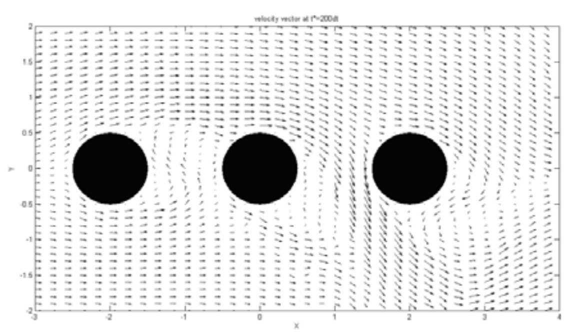
شکل ٦ بردارهای سرعت لحظه‌ای برای دو استوانه در $t^*=100\ \Delta t\ ,\ \Delta t=0.1$



شکل ۷ بردارهای سرعت لحظه‌ای برای دو استوانه در $t^*=200\ \Delta t\ ,\ \Delta t=0.1$



شکل ۸ بردارهای سرعت لحظه‌ای برای سه استوانه در $t^*=100\ \Delta t\ ,\ \Delta t=0.1$

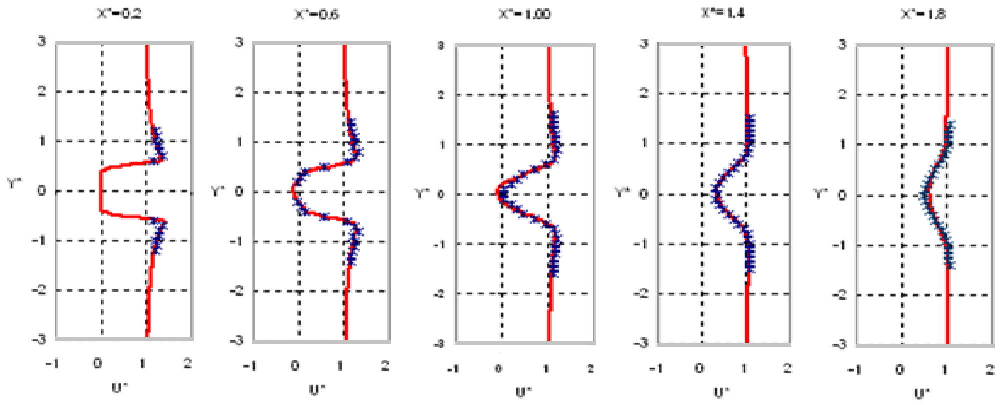


شکل ۹ بردارهای سرعت لحظه‌ای برای سه استوانه در $t^*=200\ \Delta t\ ,\ \Delta t=0.1$

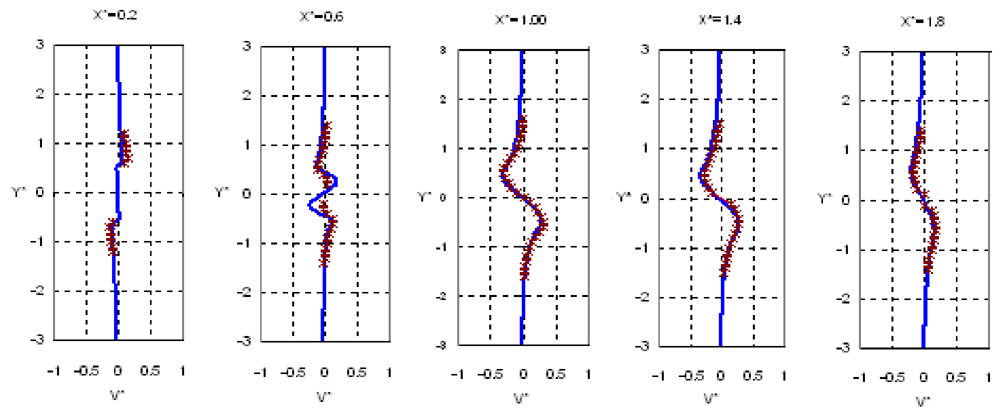
سرعت متوسط

پس از محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای، مجموع سرعت‌های لحظه‌ای در تمام تکرارهای به‌دست‌آمده، بر تعداد تکرارها تقسیم می‌گردد و بدین ترتیب سرعت متوسط مربوط به هر گره محاسبه خواهد شد.

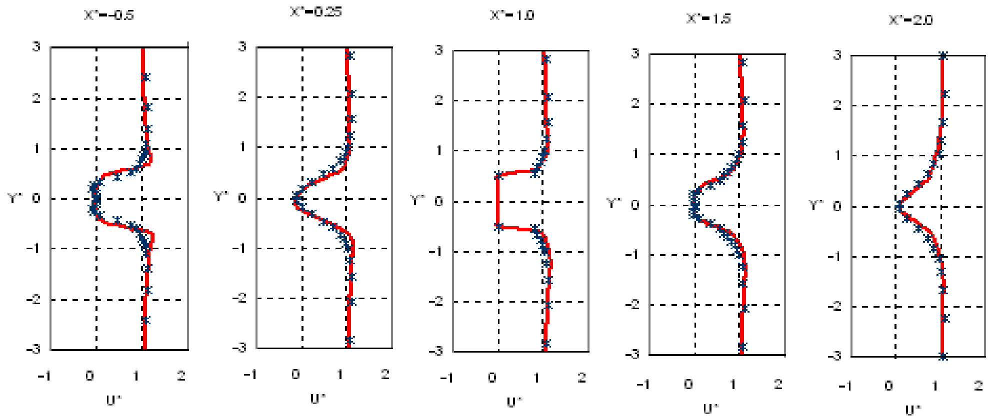
توزیع سرعت متوسط اطراف استوانه‌ها. در این بخش توزیع سرعت افقی و عمودی پیرامون یک، دو و سه استوانه در چند مقطع به‌دست آورده و ارائه می‌شود. مطلبی که باید در این قسمت بیان گردد مقایسه‌ی نتایج به‌دست‌آمده پیرامون یک استوانه با نتایج آزمایشگاهی ارائه‌شده توسط کانتویل وکالس (Cantwell & Coles) [14] و نتایج به‌دست‌آمده پیرامون دو و سه استوانه، با توجه به نبود نتایج آزمایشگاهی، با نتایج حاصل از نرم‌افزار FLUENT می‌باشد که دقت بالای نتایج به‌دست‌آمده در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی و نتایج حاصل از نرم‌افزار FLUENT صحت و درستی برنامه‌ی نوشته‌شده و روش ورتکس را نشان می‌دهد. در این بخش $\Gamma_{max} = 0.01$ و $\Delta t = 0.05$ در نظر گرفته شده است و بعد از ۲۰۰ تکرار خروجی برنامه رسم گردیده است. در این قسمت سرعت عمودی و افقی روی استوانه به تصویر در آمده است. برای به‌دست آوردن نتایج با استفاده از نرم افزار FLUENT از روش $K-\varepsilon$ و جریان سیال به فرم ناپایا (Unsteady) با عدد رینولدز ۱۴۰۰۰۰ استفاده شده است.



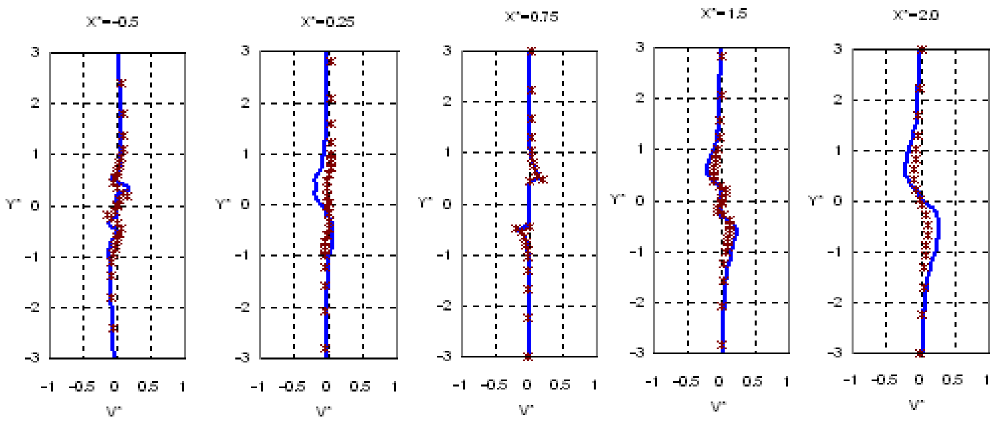
شکل ۱۰ نتایج توزیع سرعت افقی پیرامون یک استوانه در عدد رینولدز ۱۴۰۰۰۰ (———) و مقایسه با مقادیر آزمایشگاهی (*)



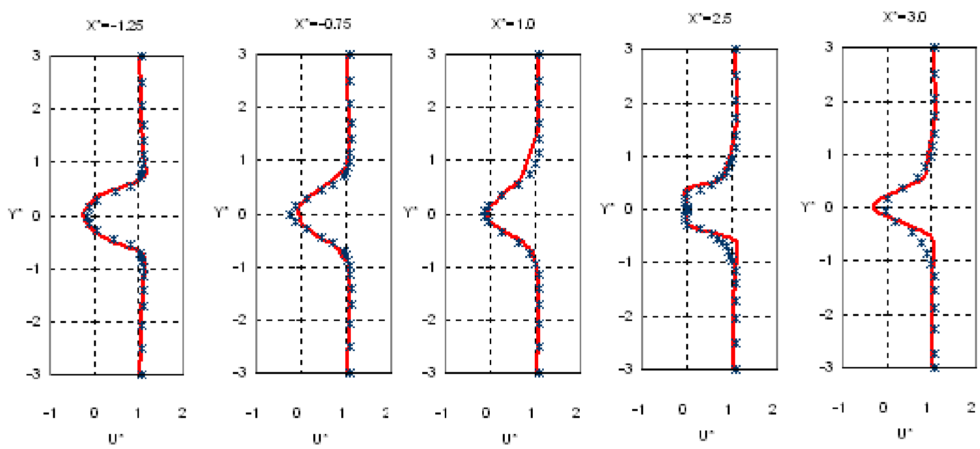
شکل ۱۱ نتایج توزیع سرعت عمودی پیرامون یک استوانه در عدد رینولدز ۱۴۰۰۰۰ (———) و مقایسه با مقادیر آزمایشگاهی (*)



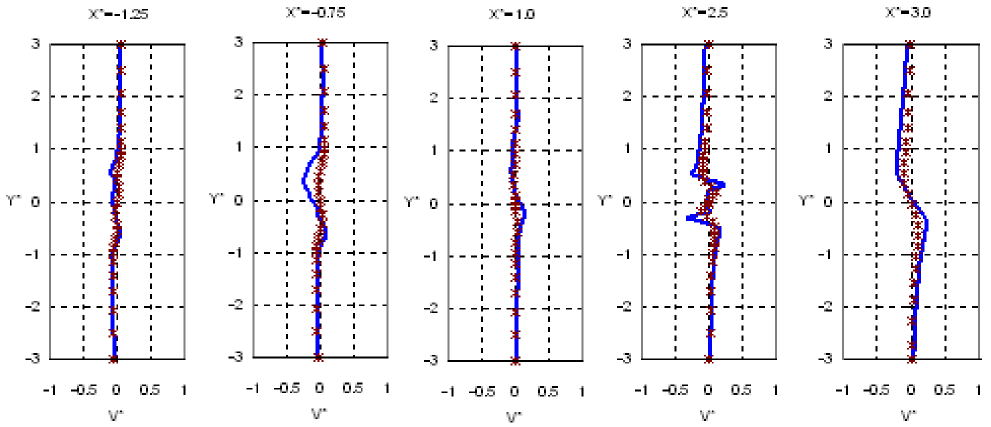
شکل ۱۲ نتایج توزیع سرعت افقی پیرامون دو استوانه در عدد رینولدز ۱٤۰۰۰۰ (———) و مقایسه با نتایج Fluent (*)



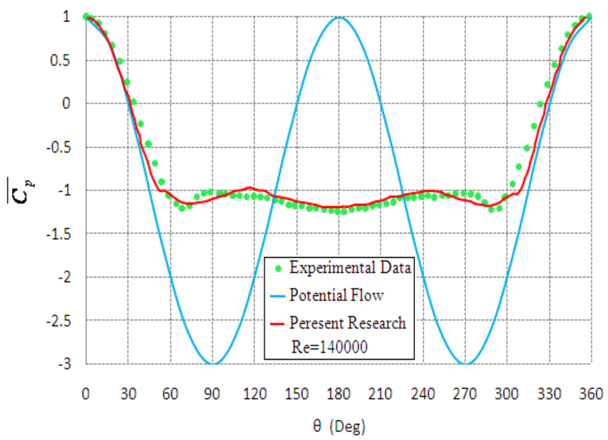
شکل ۱۳ نتایج توزیع سرعت عمودی پیرامون دو استوانه در عدد رینولدز ۱٤۰۰۰۰ (———) و مقایسه با نتایج Fluent



شکل ۱٤ نتایج توزیع سرعت افقی پیرامون سه استوانه در عدد رینولدز ۱٤۰۰۰۰ (———) و مقایسه با نتایج Fluent (*)



شکل ۱۵ نتایج توزیع سرعت عمودی پیرامون سه استوانه در عدد رینولدز ۱۴۰۰۰۰ (▬▬) و مقایسه با نتایج Fluent (*)



شکل ۱۶ تغییرات فشار متوسط زمانی $(\overline{C_p})$ برحسب θ به‌ازای $Re = 140000$
و مقایسه‌ی آنها با نتایج تجربی (●) با حضور توزیع سینوسی فشار جریان ایده‌آل

محاسبه‌ی فشار روی استوانه

برای محاسبه‌ی فشار روی استوانه از معادله‌ی ناویر–استوکس در مختصات استوانه‌ای استفاده شده است. روی دیواره $V_r = V_\theta = \frac{\partial V_\theta}{\partial t} = 0$ لذا معادله‌ی دوم ناویر–استوکس به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{1}{Re}\left(r^* \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r^*}\right) \quad (۱۶)$$

که $r^* = 0.5$. لذا برای محاسبه‌ی گرادیان فشار روی استوانه باید مشتق اول و دوم سرعت را در جهت θ محاسبه نمود. بدین منظور:

$$\left.\frac{\partial V_\theta}{\partial r^*}\right)_i = \frac{-3V_\theta(i,5)+16V_\theta(i,4)-36V_\theta(i,3)+48V_\theta(i,2)}{12\Delta r^*}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^{*2}}\right)_i = \frac{144V_\theta(i,5)-1125V_\theta(i,4)+4000V_\theta(i,3)-4890V_\theta(i,2)}{1800\Delta r^{*2}} \quad (۱۷)$$

محاسبه‌ی تنش‌های برشی عمودی و مماسی ضرایب درگ و لیفت

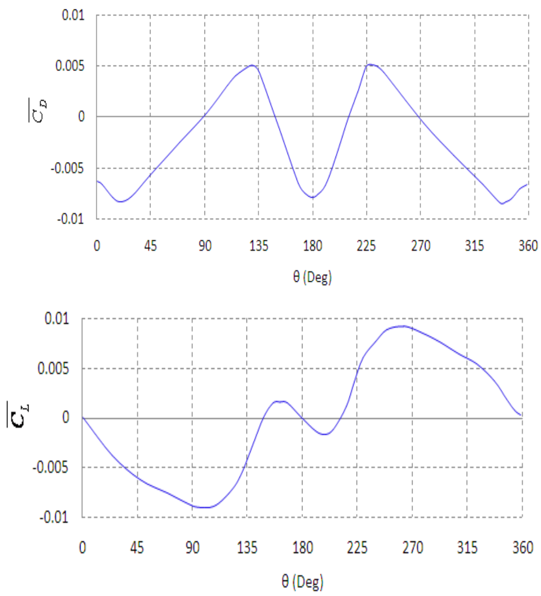
تنش برشی مماسی روی دیواره نیز با استفاده از رابطه‌ی (۱۷) محاسبه می‌شود. ضریب درگ متوسط و ضریب لیفت متوسط نیز با داشتن فرم بی‌بعد فشار لحظه‌ای به‌دست می‌آید. هم‌چنین سرعت روی دیواره $V_\theta(i,1)=0$ می‌باشد. پس از محاسبه‌ی گرادیان فشار با انتگرال‌گیری از آن در جهت θ و با شرط اولیه‌ی $P(\theta=0)=P_\infty+\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$، فشار بر روی استوانه به‌دست می‌آید.

با توجه به این که سرعت‌های رابطه‌ی بالا لحظه‌ای هستند، فشار نیز به‌طور لحظه‌ای به‌دست می‌آید. متوسط‌گیری بر روی ۵۰۰ گام زمانی متوالی انجام شد و سپس نوسان‌های فشار محاسبه شدند.

شکل (۱٦) فشار متوسط بی‌بعدشده‌ی $\overline{C_p}=\frac{\overline{P-P_\infty}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$ را برحسب θ با حضور توزیع فشار جریان ایده‌آل نشان می‌دهد که با نتایج تجربی مقایسه شده است. دیده می‌شود که مقدار آن در زاویه حدود ٦۰ درجه حداقل می‌باشد [۹].

تنش برش عمودی لحظه‌ای $\sigma^*=\frac{2}{Re}\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}$ و فرم بی‌بعد تنش برشی مماسی لحظه‌ای $\tau_0^*=\frac{1}{Re}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}$ را می‌توان محاسبه نمود که در شکل (۱۷) آمده است.

ملاحظه می‌شود که ضریب درگ متوسط در دو قسمت بالایی و پایینی استوانه با یکدیگر برابر بوده و ضریب لیفت متوسط نیز در دو قسمت بالا و پایین قرینه‌اند. به‌عبارت دیگر، ضریب لیفت کلی $(\overline{C_L})_{total}=0$ است و ضریب درگ کلی نیز با استفاده از انتگرال منحنی فوق $(\overline{C_D})_{total}=-1.263$ به‌دست خواهد آمد که تطبیقی بسیار عالی با تجربه و اندازه‌گیری دارد [۹].



شکل ۱۷ تغییرات ضریب درگ $(\overline{CD})$ و ضریب لیفت $(\overline{CL})$ بر حسب θ در $Re=140000$

بحث و بررسی نتایج

نوآوری مربوط به این مقاله در واقع مربوط به روش گردابه‌های تصادفی می‌شود که مهم‌ترین آن حل لحظه‌ای معادلات حرکت به‌جای حل متوسط زمانی سایر روشهای جریان درهم است. علاوه بر آن، در این روش برای شبیه‌سازی جریان سیال نیاز به شبکه‌بندی روی هندسه‌ی مورد نظر نیست. در حالی که، روش‌های متداول CFD همواره نیازمند شبکه‌بندی دقیق روی هندسه می‌باشند. در بررسی جریان به‌کمک این روش، به‌جای استفاده از متغیرهای اصلی نظیر فشار و سرعت، از ورتیسیته و معادله‌ی انتقال ورتیسیته استفاده می‌شود. ازاین‌رو، می‌توان حرکت سیال را بدون اطلاع از میدان فشار، در گستره‌ی وسیعی از اعداد رینولدز، اعم از رژیم‌های آرام و درهم بدون نیاز به مدل‌های شبیه‌سازی جریان درهم نظیر K-ζ و K-ω و استفاده از معادلات کمکی (Closure Problem) شبیه‌سازی نمود. از آن‌جایی که در این روش معادله انتقال ورتیسیته و حرکت

ذرات با دیدگاه لاگرانژی صورت می‌گیرد، مشکلات مربوط به ترم‌های غیرخطی معادلات ناویر–استوکس از بین می‌رود و می‌توان معادلات حاکم را بدون هیچ‌گونه ساده‌سازی به‌صورت لحظه‌ای حل کرد.

تولید لحظه‌ای چشمه‌ها و چاه‌ها با قدرت مشخص روی مرز استوانه به‌دلیل وجود مؤلفه‌ی سرعت نرمال که در اثر القای حرکت ورتکس‌ها به‌وجود می‌آید و سپس اثر القایی این چشمه‌ها و چاه‌های متولدشده بر روی هم به‌صورت هم‌زمان و لحظه‌ای به‌منظور ارضای شرط مرزی عدم لغزش روی مرزها، از ویژگی‌های قابل تأمل این تحقیق در بررسی جریان‌های آرام و درهم اطراف یک، دو و سه استوانه می‌باشد. در تصاویر توزیع ورتیسیته مشاهده می‌شود که در $Re = 140000$ ورتکس‌ها به‌صورت متقارن در اطراف استوانه‌ها تولید می‌شوند و با تقارن خوبی تا $\Delta t = 0.1, t^* = 40\Delta t$ شروع به حرکت می‌کنند. بدیهی است در رینولدزهای پایین این تقارن تا زمان بیشتری ادامه خواهد داشت. در توصیف شکل ظاهری گردابه‌های فون کارمن این گونه می‌توان بیان کرد که گردابه‌های تولیدشده پس از ناحیه‌ی پشت جسم، به‌صورت یک نوار باریک به‌صورت خمیده از یک نقطه‌ی آن مجموعه جدا می‌شوند و دوباره در یک مجموعه‌ی دیگر به‌صورت متمرکز به هم می‌رسند. عمل جدا شدن گردابه‌ها از محل تجمع بعدی دوباره به‌صورت همان نوار باریک و با انحنای مشخص انجام می‌شود. با این تفاوت که جهت حرکت ورتکس‌ها و یا به عبارت دیگر جهت انحنای حرکت به‌صورت قرینه با جهت حرکت قبل از ورود به تجمع قبلی گردابه‌ها می‌باشد. دلیل این تغییر جهت در انحنا، علامت چرخش هر ورتکس است که با توجه به جهت بردار سرعت مماسی القایی روی سطح استوانه در هر لحظه از زمان تعیین می‌شود.

در محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای، مقادیر Γ_{max} و Δt از اهمیت زیادی برخوردارند و با انتخاب کوچک‌تر این دو پارامتر، نتایج دقیق‌تری به‌دست خواهد آمد. ضمن این که سرعت محاسبات با کاهش این دو پارامتر به‌شدت افزایش می‌یابد و زمان طولانی‌تری در هر گام زمانی باید سپری شود.

نتایج مربوط به محاسبه‌ی سرعت‌های افقی و عمودی اطراف یک استوانه با نتایج آزمایشگاهی در شکل‌های (۱۱ و ۱۰) و نیز نتایج مربوط به محاسبه‌ی سرعت های افقی و عمودی اطراف دو و سه استوانه به دلیل نبود نتایج تجربی با نتایج حاصل نرم‌افزار FLUENT مقایسه شده است. بدیهی است انطباق خوب مقادیر به‌دست آمده از نتایج آزمایشگاهی با نتایج حاصل از FLUENT تأییدی بر صحت برنامه‌ی کامپیوتری و الگوریتم مربوط به آن می‌باشد.

سرعت‌های افقی برای هر مقطع نسبت به محور افقی و نیز سرعت‌های عمودی برای هر مقطع نسبت به مبدأ متقارن هستند که این امر به دلیل صفر بودن زاویه حمله جریان می‌باشد. بدیهی است با تغییر زاویه‌ی حمله این تقارن به هم می‌خورد.

در مورد جریان روی یک استوانه با توجه به تعداد گردابه‌ها که در واحد زمان از استوانه جدا می‌شوند فرکانس گردابه‌های تولید و جدا شده و نهایتاً عدد استروهال محاسبه شده که برای عدد رینولدز ۱۴۰۰۰۰ عدد استروهال حدود ۰/۲ به‌دست آمد.

در $Re = 140000$ با محاسبه‌ی سرعت متوسط در مقاطع پایین‌دست می‌توان نتیجه گرفت که برای یک استوانه در حد فاصل $X^* = 5$ و $X^* = 6$، برای دو استوانه در حد فاصل $X^* = 7$ و $X^* = 8$ و برای سه استوانه در حد فاصل $X^* = 9$ و $X^* = 10$ سرعت در $Y^* = 0.0$ به $0.99u_\infty$ می‌رسد که به دلیل اتمام لایه‌ی مرزی در پایین‌دست جریان می‌باشد.

مراجع

1. Chorin, A.J., "Numerical Study of Slightly Viscous Flow", *Journal of Fluid Mechanic*, Vol. 57, No. 4, pp. 785-796, (1973).
2. Chorin, A.J., "Vortex Sheet Approximation of Boundry Layers", *Journal of Computational Physics*, Vol. 27, pp. 428, (1978).
3. Beal, J.T. and Majda A., "Rates of Convegence for Viscous Splitting of Navier Stokes Equation", *Mathematics Computation*, Vol. 37, pp. 243, (1981).
4. Benfatto, G. and Pulvirenti, M., "Convegence of Vorticity Near The Boundary Inplanar Naier Stoks Flow", *Journal of Physics& Mathematics*, Vol. 96, pp. 59, (1984).
5. Cheer, A.Y., "Unsteady Seprated Wake Behind An Impulsively Started Cylinder In Slightly Viscous Fluid", *Journal of fluid Mechanic.*, Vol. 201, pp. 485-505, (1989).

٦. نوری، نوروز محمد، واحدی، مجید، "حل جریان درهم حول دو بیضی با استفاده از روش گردابه‌های تصادفی"، نهمین کنفرانس دینامیک شاره‌ها، ایران، شیراز، (۱۳۸۳).

۷. کهرم، محسن، ظفرمند، بهروز، "شبیه سازی جریان آرام و درهم در داخل کانال با انبساط ناگهانی با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی"، کنفرانس دینامیک شاره‌ها، ایران، رشت، (۱۳۸۰).

۸. کهرم، محسن، ظفرمند، بهروز، "محاسبه تنش های رینولدز در جریان پشت و روی یک استوانه با مقطع مستطیلی با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی"، کنفرانس دینامیک شاره‌ها، ایران، تهران، (۱۳۸۷).

۹. میرمفیدی، محسن، "شبیه‌سازی جریان لزج مغشوش در اطراف استوانه با استفاده از الگوهای جریان پتانسیل، چشمه‌ها و چاه‌ها (روش گردابه‌های تصادفی)"، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، ایران، مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، (۱۳۸۷).

10. Zafarmand, B., Ghadirzad, N. and Mirmofidi, S.M., "High Reynolds Viscous Flow Simulation Passed the Elliptical Airfoil by Random Vortex Method (RVM)", *13th Annual & 2nd International Fluid Dynamics Conference*, Iran, Shiraz, (2010).
11. Prabhu, R., "Development and Study of a High Resolution Two Dimentional Random Vortex Method", *Doctor of Philosophy These, Department Aerospace Engineering Indian Inistitute of Technology*, (2004).
12. Chorine, A.J., "Vortex Sheet Approximation of Boundry Layers", *Journal of Computational Physics*, Vol. 27,pp. 428, (1978).
13. Crowdy, D.G., "A New Calculus for Two-Dimensional Vortex Dynamic", *Journal of Computing Fluid Dynamic*, Vol. 24, pp. 9-24, (2010).
14. Cantwell, B.J and Coles, D., "A flying hot wire study of the turbulent near wake of a circular cylinder at Re=140000", Ph.D. thesis, california institute of thechnology, (1979).